METODE GAUSS-SEIDEL PREKONDISI DENGAN MENGGUNAKAN EKSPANSI NEUMANN

Juanita Adrika[1*], Syamsudhuha[2], Asmara Karma[2]

[1] Mahasiswa Program Studi S1 Matematika
[2] Dosen Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293), Indonesia

*juanitaadrika@gmail.com

ABSTRACT

We discuss a preconditioned Gauss-Seidel method to solve a system of linear equation $Ax = b$ by A which is a strictly diagonally dominant Z-matrix. Preconditioning matrix to be used is $P = (I + U)^{-1}$, where I is an identity matrix and U is a strictly upper triangular matrix. Using Neumann's expansion to approximate P, we show that the preconditioning matrix is equivalent to an existing preconditioning matrix of the form $P = (I + \beta U)$. Numerical computations show that the proposed preconditioned Gauss-Seidel method is better than the standard Gauss-Seidel method in solving a system of linear equation $Ax = b$.

Keywords: *Gauss-Seidel method, preconditioning matrix, Z-matrices.*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang solusi sistem persamaan linear $Ax = b$, dimana A berbentuk Z-matriks yang *strictly diagonally dominant*, dengan menggunakan metode Gauss-Seidel prekondisi. Matriks prekondisi yang digunakan adalah $P = (I + U)^{-1}$, dimana I adalah matriks identitas dan U adalah matriks segitiga *strictly upper*. Secara analitik dengan menggunakan ekspansi Neumann untuk aproksimasi P ditunjukkan bahwa matriks prekondisi yang dikemukakan setara dengan matriks prekondisi yang sudah ada $P = (I + \beta U)$. Selanjutnya dari uji komputasi terlihat bahwa metode Gauss-Seidel prekondisi yang didiskusikan memerlukan iterasi yang lebih sedikit dibanding metode Gauss-Seidel standar untuk mendapatkan solusi sistem persamaan linier $Ax = b$.

Kata kunci: *metode Gauss-Seidel, matriks prekondisi, Z-matriks.*

1. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear (SPL) memiliki bentuk umum sebagai berikut

$$Ax = b, \tag{1}$$

dimana x, b adalah vektor dalam $\Re^n$ dan $A \in \Re^{n\times n}$ adalah matriks nonsingular berukuran $n \times n$.

Salah satu metode untuk menyelesaikan SPL (1) adalah metode iterasi Gauss-Seidel. Kelemahan metode Gauss-Seidel adalah sangat lambat dalam konvergensinya jika matriks A berkondisi buruk (*ill-condition*). Salah satu cara untuk mempercepat konvergensi diperlukan matriks prekondisi P sedemikian hingga *condition number* PA dalam keadaan yang lebih baik dari *condition number* A ($cond(PA) << cond(A)$) [1, h. 91].

Kotakemori *et. al.*[4] menyarankan penyelesaian SPL (1) menggunakan metode Gauss-Seidel dengan matriks prekondisi $P_\beta = (I + \beta U)$, dimana I adalah matriks identitas, β adalah bilangan real positif dan U adalah matriks segitiga *strictly upper* pada A berbentuk Z-matriks yang *strictly diagonally dominant* dengan diagonal utamanya satu.

Pada artikel ini direview proses penyelesaikan SPL (1), dimana A berbentuk Z-matriks yang *strictly diagonally dominant* dengan diagonal utamanya satu, dengan metode Gauss-Seidel prekondisi yang dikembangkan oleh Niki *et. al.*[6]. Matriks prekondisi yang digunakan berbentuk $P = (I + U)^{-1}$, dimana I adalah matriks identitas dan U adalah matriks segitiga *strictly upper*.

Adapun struktur sajian tulisan ini adalah dibagian 2 didiskusikan metode Gauss Seidel dan metode Gauss Seidel prekondisi yang sudah ada. Kemudian dibagian 3 didiskusikan metode Gauss Seidel prekondisi dengan menggukan ekspansi Neumann. Diakhir artikel diberikan komputasi numerik untuk melihat kemampuan metode yang didiskusikan.

2. METODE GAUSS-SEIDEL DAN METODE GAUSS-SEIDEL PREKONDISI

Misalkan A dipisahkan menjadi $A = (D-L)-U$, dimana D adalah matriks diagonal, L adalah matriks segitiga *strictly lower* dan U adalah matriks segitiga *strictly upper* sehingga dari SPL (1) diperoleh

$$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}, \tag{2}$$

dalam bentuk iterasi, diberikan tebakan awal $x_0 \in \Re^n$ sehingga persamaan (2) dapat ditulis menjadi

$$x^{k+1} = (D - L)^{-1}Ux^k + (D - L)^{-1}b, \tag{3}$$

dimana $T = (D - L)^{-1}U$ pada persamaan (3) disebut matriks iterasi Gauss-Seidel.

Bila matriks A pada SPL (1) berbentuk Z-matriks yang *strictly diagonally dominant* . Kotakemori *et al.*[4] menggunakan matriks prekondisi

$$P_\beta = I + \beta U, \tag{4}$$

dimana I adalah matriks identitas, β adalah bilangan real positif dan U adalah matriks segitiga *strictly upper* pada A. Dengan mensubstitusikan persamaan (4) ke

SPL (1) diperoleh

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ (I + \beta U)Ax &= (I - \beta U)b, \\ A_\beta x &= b_\beta. \end{aligned} \tag{5}$$

dengan $A = I - L - U$ dengan I adalah matriks identitas, L adalah matriks segitiga *strictly lower*, dan U adalah matriks segitiga *strictly upper*, maka dari persamaan (5) dapat ditulis menjadi

$$A_\beta = I - L - U + \beta U - \beta UL - \beta U^2. \tag{6}$$

Misalkan $UL = \overline{D} + \overline{E} + \overline{F}$, dengan $\overline{D}$ adalah matriks diagonal, $\overline{E}$ adalah matriks segitiga *strictly lower*, dan $\overline{F}$ adalah matriks segitiga *strictly upper* dari UL. Persamaan (6) menjadi

$$A_\beta = I - \beta\overline{D} - L - \beta\overline{E} - (U - \beta U + \beta U^2 + \beta\overline{F}), \tag{7}$$

dimana diagonal bagian A_β sama dengan $(I - \beta\overline{D})$. Kemudian, jika

$$\beta \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki} \neq 1, \text{ untuk semua } i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{8}$$

maka dari persamaan (8), $(I - \beta\overline{D} - L - \beta\overline{E})^{-1}$ ada dan matriks Gauss-Seidel T_β untuk A_β didefinisikan dengan

$$T_\beta = (I - \beta\overline{D} - L - \beta\overline{E})^{-1}(U - \beta U + \beta U^2 + \beta\overline{F}). \tag{9}$$

T_β disebut matriks Gauss-Seidel prekondisi. Kekonvergenan metode Gauss Seidel Prekondisi (GSP) dapat dilihat pada Lema 1 dan Teorema 2 berikut.

Lema 1 [4]
Jika A adalah sebuah Z-matriks yang *strictly diagonally dominant* dengan elemen-elemen diagonal satu, maka $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $z_i \leq 0$ dan $x_i + y_i + z_i \leq 0$.

Teorema 2 [4]
Misalkan A adalah sebuah Z-matriks yang *strictly diagonally dominant* dengan diagonal utamanya satu. Maka untuk $0 \leq \beta \leq 1$, $A_{\beta c}$ juga merupakan sebuah Z-matriks yang *strictly diagonally dominant.*

3. METODE GAUSS-SEIDEL PREKONDISI DENGAN MENGGUNAKAN EKSPANSI NEUMANN

Misalkan A adalah Z-matriks yang *strictly diagonally dominant* dengan diagonal utamanya satu. Matriks iterasi Gauss-Seidel adalah $T = (I - L)^{-1}U$, sehingga dipertimbangkan untuk menurunkan nilai semua elemen U sekecil mungkin. Sehingga digunakan matriks prekondisi

$$P = (I - U)^{-1}. \tag{10}$$

Dengan asumsi diatas, $U \geq 0$ dan $\|U\| < 1$. Matriks prekondisi pada persamaan (10) disebut juga metode *Backward* Gauss-Seidel Prekondisi (BGSP).

Dari persamaan (10), dengan menggunakan ekspansi Neumann [5, h. 126] diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} P &= (I - U)^{-1} \\ P &= (I + U + (U + \ldots + U^{n-2})U). \end{aligned} \tag{11}$$

Dari persamaan (11), misalkan $Q = U + \ldots + U^{n-2}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \|Q\| &\leq \|U\| + \|U\|^2 + \ldots + \|U\|^{n-2} \\ &= \left(\frac{\|U\| - \|U\|^{n-1}}{1 - \|U\|} \right). \end{aligned}$$

$\|U\| < 1$ untuk n yang cukup besar, sehingga $\|U\| \gg \|U\|^{n-1}$. Kemudian dengan menetapkan

$$p \simeq \|Q\| \leq \frac{\|U\|}{1 - \|U\|}, \tag{12}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} P_{\beta c} &= (I + U + pU) \\ &= (I + (1 + p)U). \end{aligned}$$

Misalkan $1 + p = \beta_c$, sehingga diperoleh matriks prekondisi berikut

$$P_{\beta c} = I + \beta_c U. \tag{13}$$

Matriks prekondisi persamaan (13) setara dengan matriks prekondisi pada persamaan (4).

Dengan mensubstitusikan persamaan (13) ke SPL (1), diperoleh $A_{\beta c} = P_{\beta c}A$ dan $b_{\beta c} = P_{\beta c}b$. Kemudian diperoleh

$$A_{\beta c} = (I + \beta_c U)A \quad \text{dan} \quad b_{\beta c} = (I + \beta_c U)b, \tag{14}$$

diberikan $A = I - L - U$ dengan I adalah matriks identitas, L adalah matriks segitiga *strictly lower*, dan U ($U_{ij} \geq 0, \forall ij$) adalah matriks segitiga *strictly upper*, maka dari persamaan (14) dapat ditulis menjadi

$$A_{\beta c} = I - L - U + \beta_c U - \beta_c UL - \beta_c U^2. \tag{15}$$

Misalkan $UL = \overline{D} + \overline{E} + \overline{F}$, dengan $\overline{D}$ adalah matriks diagonal, $\overline{E}$ adalah matriks segitiga *strictly lower*, dan $\overline{F}$ adalah matriks segitiga *strictly upper* dari UL. Sehingga persamaan (15) menjadi

$$A_{\beta c} = I - \beta_c \overline{D} - L - \beta_c \overline{E} - (U - \beta_c U + \beta_c U^2 + \beta_c \overline{F}), \tag{16}$$

dimana diagonal bagian $A_{\beta c}$ sama dengan $(I - \beta_c \overline{D})$. Maka, jika

$$\beta_c \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} a_{ki} \neq 1, \text{ untuk semua } i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

maka $(I - \beta_c \overline{D} - L - \beta_c \overline{E})^{-1}$ ada dan matriks Gauss-Seidel $T_{\beta c}$ untuk $A_{\beta c}$ didefinisikan dengan

$$T_{\beta c} = (I - \beta_c \overline{D} - L - \beta_c \overline{E})^{-1} (U - \beta_c U + \beta_c U^2 + \beta_c \overline{F}). \tag{17}$$

$T_{\beta c}$ disebut metode *Backward* Gauss-Seidel Prekondisi (BGSP). Kemudian dengan pemisahan (*splitting*) pada persamaan (17) diperoleh

$$M = (I - \beta_c \overline{D} - L - \beta_c \overline{E})^{-1}, \tag{18}$$

$$N = (U - \beta_c U + \beta_c U^2 + \beta_c \overline{F}). \tag{19}$$

Dengan mengambil persamaan (16) dan (17), maka diperoleh

$$T_{\beta c} = M_{\beta c}{}^{-1} N_{\beta c}. \tag{20}$$

$T_{\beta c}$ disebut juga matriks iterasi metode *Backward* Gauss-Seidel Prekondisi (BGSP) untuk $A_{\beta c}$.

Konvergensi untuk metode Gauss-Seidel prekondisi $P = (I - U)^{-1}$ dapat dilihat pada Lema 1 dan Teorema 2.

4. UJI KOMPUTASI

Pada bagian ini akan dilakukan komputasi numerik untuk melihat keunggulan metode *Backward* Gauss-Seidel Prekondisi (BGSP) yang dibandingkan dengan metode Gauss-Seidel Prekondisi (GSP) dan metode Gauss-Seidel (GS) standar menggunakan software Matlab $R2010a$ untuk menyelesaikan SPL (1) dimana A adalah Z-matriks yang strictly diaagonally dominan dengan diagonal utamanya satu.

Contoh 1 [2] Selesaikan SPL (1) yang muncul dari diskritisasi pada persamaan berikut menggunakan metode Gauss-Seidel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < y < 2; \tag{21}$$

dengan syarat

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2, \qquad & u(x,2) &= (x-2)^2, \qquad & 0 \leq x \leq 1; \\ u(0,y) &= y^2, \qquad & u(1,y) &= (y-1)^2, \qquad & 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

dan nilai eksak $u(x,y) = (x-y)^2$.

Penyelesaian. Dengan menggunakan diskritisasi metode *Finite Difference* [2, h. 717] maka diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + k^2_{i+1,j}}{h^2}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{k^2}, \tag{23}$$

dimana $w_{i.j} \approx u(x_i, y_j)$.

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (22) dan (23), terhadap persamaan (21) untuk $n = 4$, maka diperoleh

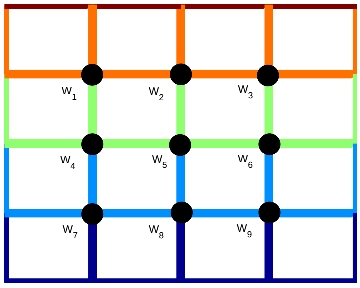
$$-k^2 w_{i-1,j} + 2(k^2 + h^2) w_{i,j} - k^2 w_{i+1,j} - h^2 w_{i,j-1} - h^2 w_{i,j+1} = -4(h^2 k^2), \tag{24}$$

untuk $i = 1,2,3$ dan $j = 1,2,3$. Jika persamaan (24) diekpresikan dalam bentuk *interior grid point* yaitu seperti pada Gambar 1. Gambar 2 adalah domain dari persoalan Poisson.

Dengan $h = \frac{1}{4}$ dan $k = \frac{1}{2}$ maka persamaan (24) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \\ W_6 \\ W_7 \\ W_8 \\ W_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{160} \\ -\frac{3}{40} \\ \frac{9}{160} \\ \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{177}{160} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{31}{20} \end{bmatrix}.$$

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi (N) dan spektral radius (ρ) dari GS,GSP dan BGSP dalam menemukan solusi SPL (1) dimana A adalah Z-matriks yang *strictly diagonally dominan* dengan diagonal utamanya satu. Dalam prosesnya, metode-metode tersebut



Gambar 1: Interior Great Point

memerlukan tebakan awal dan nilai β untuk GSP dan nilai p untuk BGSP. Hal ini dilakukan untuk mengetahui apakah prekondisi berpengaruh terhadap keberhasilan dalam mempercepat konvergensi. Tabel 1 menunjukkan penggunaan GS, GSP dengan nilai estimasi $\beta = \frac{1}{1-\|U\|}$ dan BGSP dengan p diperoleh dari percobaan numerik sebagai parameter optimum bilangan real positif. Dengan menggunakan tebakan awal $x^{(0)}$ adalah vektor maka dapat dilihat pada Tabel 1 nilai spektral radius (ρ) dari ketiga metode mempunyai nilai perbedaan yang signifikan, dengan $\rho(T_{\beta c}) < \rho(T_\beta) < \rho(T) < 1$. Untuk ukuran matriks 9×9 diperoleh perbandingan spektral radius dari ketiga metode yaitu $0.1269 < 0.2181 < 0.5000 < 1$. Dalam

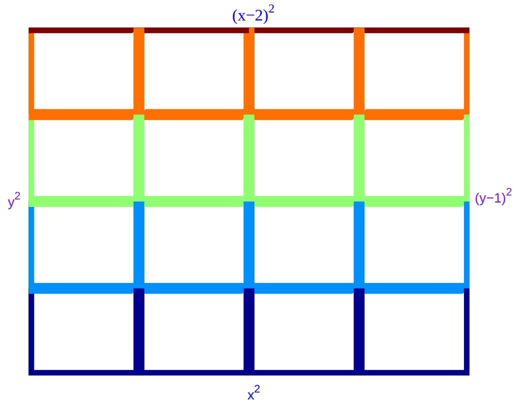
Tabel 1: Hasil Spektral Radius GS, GSP dan BGSP

Ukuran Matriks	BGSP		GSP		GS
	p	$\rho(T_{\beta c})$	β	$\rho(T_\beta)$	$\rho(T)$
9×9	0.5000	0.1269	0.5000	0.2181	0.5000
49×49	0.9266	0.4228	0.9266	0.5426	0.8536
225×225	0.9808	0.4702	0.9808	0.6883	0.9619
961×961	0.9951	0.4927	0.9951	0.7317	0.9904

menentukan solusi numerik juga ditentukan kriteria pemberhentian program komputasi yang sama pada setiap metode yaitu jika $error \leq Tol$, dengan Tol adalah toleransi. Toleransi yang digunakan pada Contoh 1 sebesar $1e-6$. Adapun perbandingan jumlah iterasi ketiga metode ditunjukkan pada Tabel 2. Berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat bahwa untuk menyelesaikan SPL (1) dengan penambahan matriks prekondisi memberikan pengaruh yang signifikan terhadap jumlah iterasi. Selain itu, juga diperoleh nilai-nilai $\|u - W\|_\infty$ selisih antara solusi eksak dan solusi Gauss-Seidel. Adapun solusi dari diskritisasi metode *Finite Difference* dari persamaan (21) disajikan dalam grafik seperti pada Gambar 3. Dari Gambar 4 (a) dengan toleransi yang diberikan sebesar $1e-6$ dan ukuran matriks 9×9, diperoleh $\|u - W\|_\infty = 3.7e-006$ dengan jumlah iterasi GS yang diperoleh sebanyak 19 iterasi. Gambar 4 (b) menunjukkan jumlah iterasi GSP sebanyak 14 iterasi dengan $\|u - W\|_\infty = 1.66e-006$. Sedangkan Gambar 4(c) menunjukkan jumlah

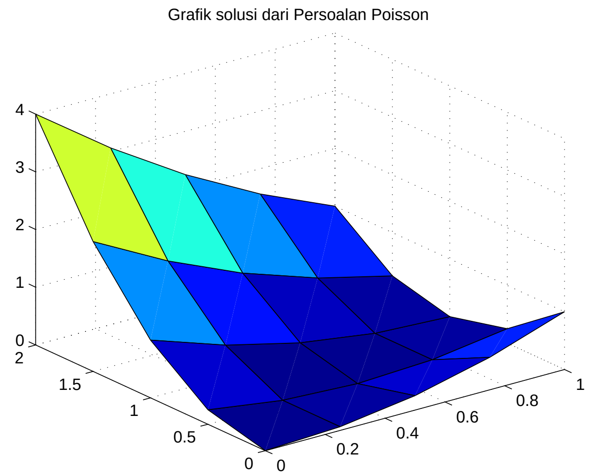
Tabel 2: Jumlah Iterasi GS, GSP dan BGSP

Ukuran Matriks	BGSP			GSP			MGS	
	p	N	$\|u-W\|_\infty$	β	N	$\|u-W\|_\infty$	N	$\|u-W\|_\infty$
9×9	0.5000	8	$3.81e-006$	0.5000	14	$1.66e-006$	19	$3.7e-006$
49×49	0.9266	19	$2.22e-006$	0.9266	47	$4.14e-005$	71	$5.22e-005$
225×225	0.9808	25	$9.84e-006$	0.9808	163	0.00039	249	0.000507
961×961	0.9951	75	0.00169	0.9951	556	0.00336	854	0.00419



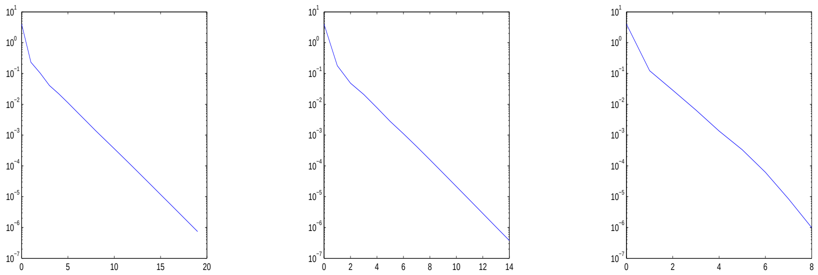
Gambar 2: Domain dari Persoalan Poisson

iterasi BGSP sebanyak 8 iterasi dengan $\|u-W\|_\infty = 3.81e-006$. Secara keseluruhan BGSP memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan GSP dan GS. Hal ini menunjukkan bahwa *Backward* Gauss-Seidel Prekondisi (BGSP) lebih unggul dari pada Gauss-Seidel Prekondisi (GSP) dengan matriks prekondisi $P = I + \beta U$ dan Gauss-Seidel (GS) standar.



Gambar 3: Grafik Solusi dari Persoalan Poisson

(a) **(b)** **(c)**



Gambar 4: (a) Jumlah Iterasi pada persoalan Poisson untuk metode GS dengan ukuran matriks 9×9, (b) Jumlah Iterasi pada persoalan Poisson untuk metode GSP dengan ukuran matriks 9×9, (c) Jumlah Iterasi pada persoalan Poisson untuk metode BGSP dengan ukuran matriks 9×9.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Allaire, G. & Kaber, S. M. 2008. Texts in Applied Mathematics. *Numerical Linear Algebra*. Springer, New York.

[2] Burden, R. L. & Faires, J. D. 2010. *Numerical Analysis, Ninth Edition*. Cengage Learning, Canada.

[3] James, K. R. 1973. Convergence of Matrix Iteration Subject To Diagonal Dominance. *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**: 478–484.

[4] Kotakemori, H., Niki, H. & Okamoto, N. 1996. Accelerated Iterative Method for Z-Matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **75**: 87–97.

[5] Meyer, C. D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia.

[6] Niki, H., Hirano, H. & Kohno, T. The Preconditioned Gauss-Seidel Method: 1–6. http://metronu.ulb.ac.be/imacs/lausanne/CP/314-8.pdf, 20 Februari 2014.